Primer examen parcial de Probabilidad I

2025-2 FES Acatlán

Miércoles 26 de febrero

1. Una compañía de seguros examina su grupo de clientes con seguro de auto y obtiene la siguiente información:

   - Todos los clientes aseguran al menos un automóvil.
   - El 70 % de los clientes aseguran más de un automóvil.
   - El 20 % de los clientes aseguran un automóvil deportivo.
   - De los clientes que aseguran más de un automóvil, el 15 % asegura un automóvil deportivo.

   Calcule la probabilidad de que un cliente seleccionado al azar asegure exactamente un automóvil y que dicho automóvil no sea deportivo.

2. Una prueba médica para detectar una cierta enfermedad tiene las siguientes características:

   - Si una persona tiene la enfermedad, la prueba da un resultado positivo con probabilidad 0.95 (a esta probabilidad se le conoce como *sensibilidad* de la prueba).
   - Si una persona no tiene la enfermedad, la prueba da un resultado positivo con probabilidad 0.05, (esta probabilidad es llamada *tasa de falsos positivos*).
   - Se sabe que la prevalencia de la enfermedad en la población es 0.01, es decir, 1 % de la población padece la enfermedad.

   Si una persona seleccionada al azar obtiene un resultado positivo en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad?

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada por la siguiente expresión

   $$f(x) = Ce^{-k(x-a)}\mathbb{1}_{[a,b]}(x),$$

   donde C es una constante por determinar, $a < b$ y $k > 0$ es un parámetro conocido.

   (a) Grafique la función f

(b) Determine el valor de C de manera que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad válida.

4. La distribución hipergeométrica modela situaciones en las que se extrae una muestra sin reemplazo de una urna que contiene dos tipos de bolas. Si la urna tiene N bolas en total, de las cuales K son blancas y $N-K$ son negras, y se selecciona aleatoriamente y sin reemplazo una muestra de tamaño n, la variable aleatoria X que cuenta el número de bolas blancas en la muestra tiene la siguiente función de masa de probabilidad,

$$\mathbb{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{máx}(0,n-(N-K))\leq x\leq \text{mín}(n,K)\\ 0 & \text{e.o.c.}\end{cases}$$

Ahora, considere el siguiente escenario:

En una empresa hay 50 empleados, de los cuales 30 trabajan en el departamento de ingeniería y 20 en el departamento de administración. Se seleccionan al azar y sin reemplazo 10 empleados para participar en un curso de liderazgo.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 de los empleados seleccionados pertenezcan al departamento de ingeniería?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 empleados seleccionados sean del departamento de administración?

5. Sea $F(x)$ una función definida de la siguiente manera:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0,\\ 0.3 & \text{si } 0\leq x<2,\\ 0.5 & \text{si } 2\leq x<5,\\ 0.5+0.125\,(x-5)^2 & \text{si } 5\leq x<7,\\ 1 & \text{si } x\geq 7.\end{cases}$$

(a) Demuestre que $F(x)$ es una función de distribución válida.

(b) Calcule las siguientes probabilidades:

- $\mathbb{P}(X=2)$
- $\mathbb{P}(0<X\leq 7)$
- $\mathbb{P}(X>4)$